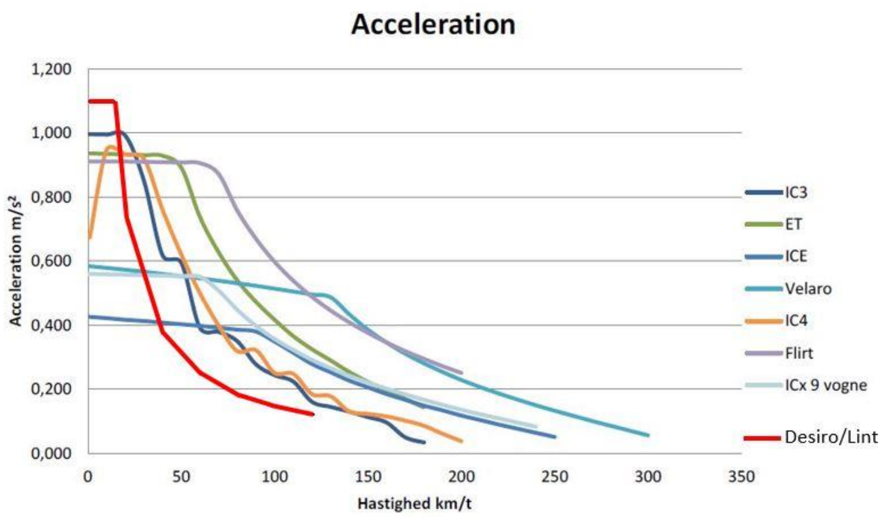
# Teknisk bilag

## Togets acceleration/deceleration

Vi har skrevet et computerprogram der beregner togets bevægelser. Her har vi blandt andet brug for at vide hvor hurtigt toget kan accelerere/decelerere. Togets motor leverer kraften der får toget til at accelerere. Sammenhængen mellem motorens effekt *P* og den leverede kraft *F* er

$$P = F \cdot v$$

hvor *v* er togets hastighed. Hvis vi sætter motorens effekt lig med en konstant ser vi at jo hurtigere toget kører jo mindre bliver den leverede kraft og dermed togets acceleration. Dette ses i figur 6. Vi har anvendt figurens accelerationsprofiler i beregningerne. Omvendt leverer togets bremser en kraft der er uafhængig af hastigheden. Vi har i alle beregninger sat decelerationen til en konstant på 0,5 m/s$^2$ eller 1,8 km/t per sekund.




Figur 6. Accelerationsprofiler fra ”Togfonden DK” side 36, Trafikstyrelsen og Banedanmark (2013). Den indsatte røde graf for Desiro/Lint er beregnet her i bilaget.

## Togets bevægelser

For at kunne beregne togets bevægelser har vi også brug for strækningernes layout. Disse er taget fra ”TIB-S”, Banedanmark (2015), ”Ny bane til Billund, Beslutningsgrundlag”, Banedanmark (2018) og ”Ny jernbane over Vestfyn, VVM-redegørelse”, Vejdirektoratet (2016). Derudover har vi suppleret med egne strækningslayout for Give-løsningen og Skibet-løsningen. Dette giver os figur 1, 2, 3 og 4, hvor Togfondens hastighedsopgraderinger er de blå tal.

For at kunne beregne de endelige gennemløb, lader vi først toget køre baglæns fra slut- til startstation. Her forsøger toget at accelerere med 0,5 m/s$^2$ (bremseniveauet ved forlæns kørsel) indtil maxhastigheden for den aktuelle strækningssektion eventuelt nås. Dette giver en hastighedsprofil for strækningen som toget ikke må overskride under forlæns gennemløb. Dermed kan toget under forlæns gennemløb nå at bremse rettidigt ned og overholde maxhastigheder og stationsophold forude.

## Eksakte løsninger

For at kunne teste computerprogrammet har vi brug for nogle eksakte løsninger. Vi antager en accelerationsprofil på formen

$$a(v) = \begin{cases} a_0 & \text{for} \quad 0 \leq v \leq v_0 \\ \dfrac{a_0 \cdot v_0}{v} & \text{for} \;\; v_0 < v \leq v_m \end{cases}$$

Her er knækpunktet $v_0$ den hastighed hvor accelerationen går fra at være konstant $a_0$ til at være omvendt proportional med hastigheden. Togets maxhastighed er $v_m$ . Vi integrerer

$$\frac{dv}{dt} = a(v)$$

vha. separation og finder hastigheden som funktionen af tiden

$$v(t) = \begin{cases} a_0 \cdot t & \text{for} \quad 0 \leq t \leq t_0 \\ \sqrt{2a_0 v_0 \left(t - \dfrac{v_0}{2a_0}\right)} & \text{for} \;\; t_0 < t \leq t_m \end{cases}$$

hvor tiden ved knækpunktet er

$$t_0 = \frac{v_0}{a_0}.$$

Vi kan beregne tiden ved maxhastigheden

$$t_m = \frac{t_0}{2}\left(1 + \left(\frac{v_m}{v_0}\right)^2\right).$$

Hvis vi kender et punkt $(t, v)$ på $v(t)$-grafen efter knækpunktet kan vi beregne

$$v_0 = a_0\left(t - \sqrt{t^2 - \frac{v^2}{{a_0}^2}}\right).$$

Startacceleration for et Desiro/Lint-tog er $a_0$ = 1,1 m/s$^2$ og maxhastigheden er $v_m$ = 120 km/t. På https://www.youtube.com/watch?v=bA9bjpg2I4M ser man et Desiro-tog accelerere fra 0 til 100 km/t på 95 sekunder. Dermed er

$$v_0 = 1{,}1\left(95 - \sqrt{95^2 - \frac{\left(\frac{100}{3{,}6}\right)^2}{1{,}1^2}}\right) \text{m/s} = 3{,}76 \text{ m/s} = 13{,}5 \text{ km/t}$$

Dette giver den røde graf i figur 6.

Endelig kan vi integrere v(t) og finde togets stedfunktion

$$s(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot t^2 & \text{for } \; 0 \leq t \leq t_0 \\ \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2a_0 v_0} \cdot \left(t - \frac{v_0}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6} \cdot \frac{{v_0}^2}{a_0} & \text{for } \; t_0 < t \leq t_m \end{cases}$$

Stedet ved knækpunktet er derfor

$$s_0 = \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot {t_0}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{{v_0}^2}{a_0}$$

og stedet ved maxhastigheden er

$$s_m = \frac{s_0}{3}\left(1 + 2\left(\frac{v_m}{v_0}\right)^3\right).$$

De totale profiler bliver derfor

$$v(t) = \begin{cases} a_0 \cdot t & \text{for } \; 0 \leq t \leq t_0 \\ v_0 \cdot \sqrt{2t/t_0 - 1} & \text{for } \; t_0 < t \leq t_m \end{cases}$$

og

$$s(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot t^2 & \text{for } \; 0 \leq t \leq t_0 \\ \frac{2}{3} \cdot s_0 \cdot (2t/t_0 - 1)^{3/2} + \frac{1}{3} \cdot s_0 & \text{for } \; t_0 < t \leq t_m \end{cases}$$

## Test af computerprogram

Vi tester computerprogrammet ved at et tog accelererer fra 0 km/t til maxhastigheden $v_m$ . Herefter kører det med denne hastighed indtil det når stedet $s_1$ . Her bremser det ned med konstant acceleration $a_b$ = -0,5 m/s$^2$ = -1,8 km/t per sekund indtil standsning i stedet $s_2$ . Vi får følgende eksakte profiler

$$v(t) = \begin{cases} a_0 \cdot t & \text{for } \; 0 \leq t \leq t_0 \\ v_0 \cdot \sqrt{2t/t_0 - 1} & \text{for } \; t_0 < t \leq t_m \\ v_m & \text{for } \; t_m < t \leq t_1 \\ a_b \cdot (t - t_1) + v_m & \text{for } \; t_1 < t \leq t_2 \end{cases}$$

$$s(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot t^2 & \text{for } \; 0 \le t \le t_0 \\ \frac{2}{3} \cdot s_0 \cdot (2t/t_0 - 1)^{3/2} + \frac{1}{3} \cdot s_0 & \text{for } \; t_0 < t \le t_m \\ v_m \cdot (t - t_m) + s_m & \text{for } \; t_m < t \le t_1 \\ \frac{1}{2} \cdot a_b \cdot (t - t_1)^2 + v_m \cdot (\mathrm{t} - t_1) + s_1 & \text{for } \; t_1 < t \le t_2 \end{cases}$$

hvor

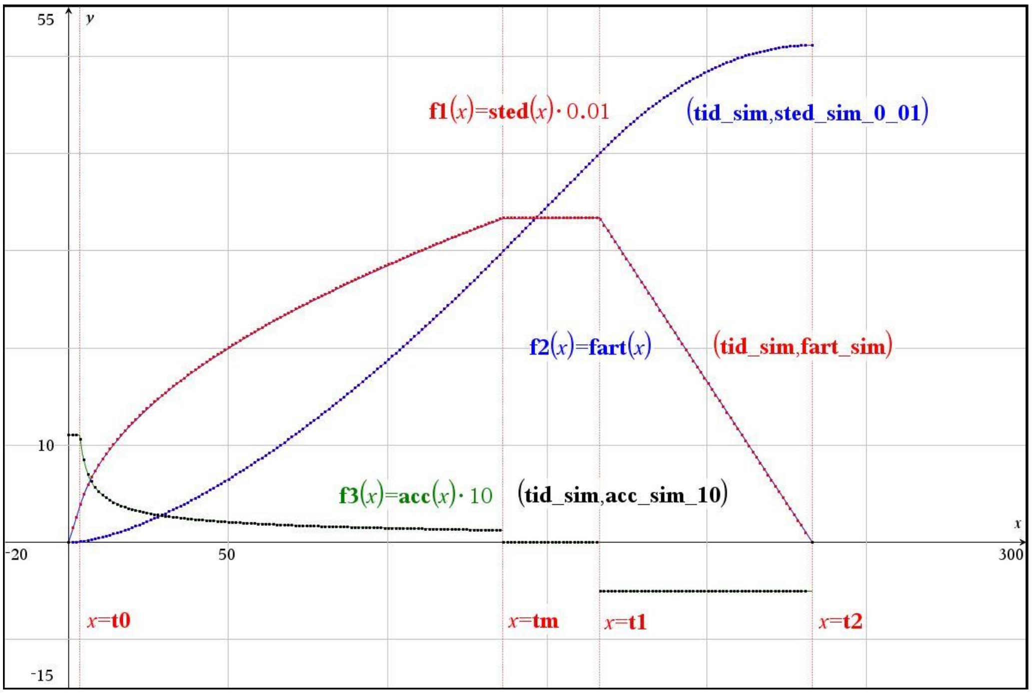
$$t_1 = \frac{s_1 - s_m}{v_m} + t_m$$

og

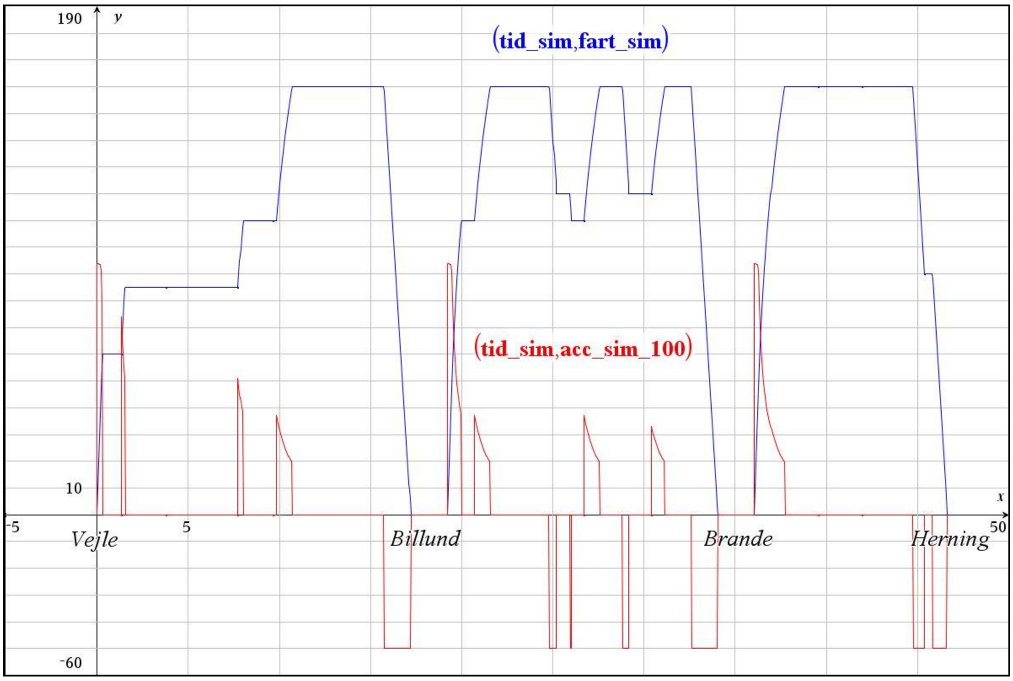
$$t_2 = -\frac{v_m}{a_b} + t_1$$

$$s_2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{{v_m}^2}{a_b} + s_1 \,.$$

Resultatet for et Desiro-tog ses i figur 7.




Figur 7. Test af computerprogram med et Desiro-tog. Toget accelererer fra 0 km/t til max-hastigheden på 120 km/t og holder denne indtil stedet $s_1$ = 4000 m. Herefter bremser det ned indtil standsning. De fuldt optrukne grafer er ovenstående eksakte løsninger for sted, hastighed og acceleration som funktion af tiden. Punkterne er computerprogrammets løsninger, som ligger som perler på de eksakte grafer. Enheder: tid i sekunder, sted i meter, hastighed i meter per sekund og acceleration i meter per sekund i anden. For at alle graferne kan være i samme figur er stedet blevet ganget med 0,01 og accelerationen med 10.




Figur 8. Computersimulering af et gennemløb med et ET-tog fra Vejle til Herning med 2 minutters stop i Billund Lufthavn og Brande og uden togkrydsninger. Hastigheden og accelerationen er afbildet som funktion af tiden. Enheder: tid i minutter, hastighed i km/t og acceleration i meter per sekund i anden. For at begge grafer kan være i samme figur er accelerationen blevet ganget med 100.